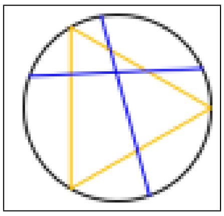

Paradoxe de Bertrand

TS & ES

Fiche Élève

Auteur : RM

Joseph Bertrand, dans son livre : « Calcul des probabilités » paru en 1889, pose le problème suivant :

> On choisit au hasard une corde d'un cercle donné. Quelle est la probabilité pour que la longueur de celle-ci soit supérieure au côté du triangle équilatéral inscrit dans le cercle ?

Il se trouve qu'il y a plusieurs manières légitimes de comprendre la phrase « On choisit au hasard une corde d'un cercle donné » et que ces interprétations conduisent à des réponses différentes. On y a vu un paradoxe, que l'on appelle le « paradoxe de Bertrand ».

En fait, ces interprétations conduisent à des problèmes différents de Calcul des Probabilités, ce que nous montrerons plus facilement en modifiant légèrement le problème initial :

> On choisit au hasard une corde sur un demi-cercle (c) d'un cercle donné (C). Quelle est la probabilité pour que la longueur de celle-ci soit supérieure au côté du triangle équilatéral inscrit dans le cercle ?

Pour fixer les idées, on supposera que (C) est le cercle-unité, (c) étant l'arc $A\overset{\frown}{D}A'$, voir la figure 0.1. On pourra vérifier que la longueur d'un côté de triangle équilatéral inscrit dans (C), par exemple AB, est égale à $\sqrt{3}$.

Première partie, première interprétation : On choisit deux points A et M au hasard sur le demi-cercle (C). La longueur de la corde AM ne change pas si on la fait tourner dans une rotation de centre O ou si on échange les noms de ses extrémités. On peut donc supposer que A est le point de coordonnées (1,0) et que l'on est dans la configuration de la figure 0.1. Le problème posé : comparer les longueurs de AM et AB, n'a pas été altéré.

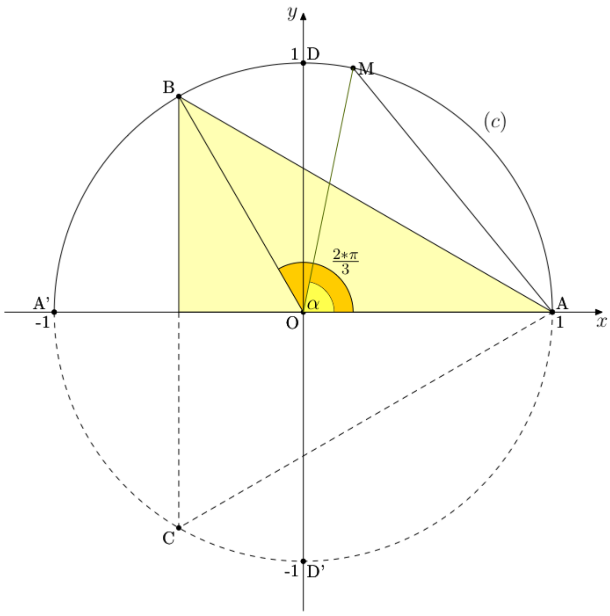

Figure 0.1

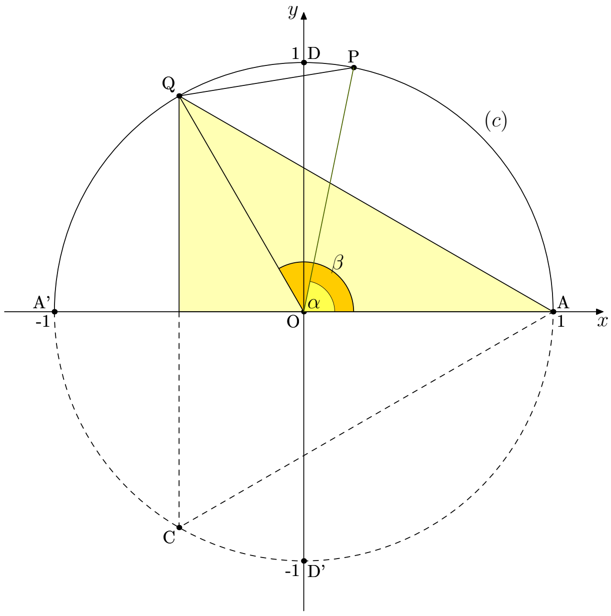

Figure 0.2

1 - Où doit se trouver le point M pour que la longueur de la corde AM soit supérieure ou égale à la longueur du côté du triangle équilatéral ?

2 - Pour placer le point M au hasard sur le demi-cercle (c), il suffit de choisir au hasard un nombre α dans

l'intervalle $[0,\pi]$ et de placer sur (c) le point M tel que l'angle $\widehat{AOM}$ compté en radians dans le sens direct soit égal à α.

On rappelle que dire que α est choisi au hasard dans l'intervalle $[0,\pi]$ signifie que la probabilité pour que ce nombre aléatoire tombe dans un sous-intervalle de $[0,\pi]$ de longueur a est égale à a/π.

2.a - Exprimer l'événement

E= « la longueur de la corde AM est supérieure ou égale à la longueur du côté AB »

en utilisant le nombre aléatoire α.

2.b - En déduire la probabilité $p(E)$ de E ?

3 - Écrire un algorithme qui

- simule la répétition 100000 fois de l'expérience qui consiste à tirer au hasard un point M sur le demi-cercle (c),
- calcule la fréquence de réalisation de l'événement « E » après chaque tirage,
- affiche la dernière fréquence calculée,
- et représente graphiquement la suite des fréquences,

à l'aide d'un logiciel de calcul comme « scilab », « Xcas » ou équivalent.

4 - Quelle est la valeur de stabilisation exacte de la suite des fréquences ? Justifier ce résultat.

Deuxième partie, deuxième interprétation

Nous allons maintenant tirer deux points au hasard sur (c), notés P et Q. P est repéré comme ci-dessus par un angle noté α, Q par un angle appelé β, voir la figure 0.2. On considère l'événement

E= « la longueur de la corde PQ est supérieure ou égale à la longueur du côté AB » .

5 - Exprimer l'événement « E » à l'aide de la variable aléatoire $X = |\beta - \alpha|$.

6 - Écrire un algorithme qui

- simule la répétition 100000 fois de l'expérience qui consiste à tirer au hasard deux points P et Q sur le demi-cercle (c),
- calcule la fréquence de réalisation de l'événement « E » après chaque tirage,
- affiche la dernière fréquence calculée,
- et représente graphiquement la suite des fréquences.

7 - Proposer une valeur de $p(E)$. Comment expliquer la différence avec la première partie ?