Choisir un point au hasard sur un cercle

3e

Fiche professeur

Auteur : Raymond Moché

<u>But de l'activité :</u> Constater que la fréquence d'un événement lié à une expérience aléatoire devient voisine de sa probabilité (connue d'avance pour des raisons géométriques) quand cette expérience est répétée un grand nombre de fois. C'est une activité de base sur l'approche fréquentiste de la probabilité.

<u>Compétences engagées :</u>

Usage d'un tableur-grapheur : dérouler une formule insérée ; utiliser de gros tableaux de nombres (colonnes de 1500 termes) ; interpréter un graphe.
Toutes les formules utilisées sont pré-insérées.

<u>Pré-requis :</u>

- ✔ Notions d'effectif et de fréquence ; les élèves connaissent déjà la probabilité d'un événement comme valeur approximative de stabilisation des fréquences.

<u>Matériels utilisés :</u>

- ✔ Classe informatique.

<u>Durée indicative :</u> une heure.

<u>Nom des logiciels utilisés :</u>

- ✔ Tableur-grapheur de OpenOffice (l'adaptation à un autre tableur serait immédiate).

<u>Documents à télécharger :</u>

- ✔ Classeurs « Classeur Élève » pour les élèves, « Classeur Professeur » pour les professeurs, Fiche Élève et Fiche Professeur (aux formats odt et pdf).

<u>Déroulement de la séance :</u>

Consacrer quelques minutes aux questions 1 et 2 pour bien comprendre de quoi on parle, puis passer à la feuille de calcul.

<u>Commentaires</u>

Cette activité a exactement le même rôle que l'activité :

<u>Approche fréquentiste de la probabilité en 3ème (1)</u>

proposée sur le même site. Elle est beaucoup plus jolie car intervient ici une probabilité dite géométrique, c'est à dire introduite à partir d'un problème de géométrie. C'est une réponse possible (pas la bonne) au problème de Bertrand (voir par exemple

<u>Paradoxe de Bertrand</u>).

dont il n'est pas possible de parler ici. De manière cachée, elle fait intervenir une loi de probabilité hors programme mais qui est citée dans le document d'accompagnement et qui ne pose pas de problème sur le plan de l'intuition.

<u>Difficultés particulières</u>

Dans la partie Simulation (question 3), nous aurions pu utiliser la fonction ALEA du tableur. Nous avons préféré implanter un générateur de nombres « choisis au hasard dans l'intervalle [0,1[» . Il s'agit d'un générateur congruentiel ordinaire et éprouvé. À partir d'un nombre (inséré en A8, ici 123456789, considéré comme un reste de rang 0), nous calculons sur la plage A9:A1508 les restes successifs dans la division euclidienne de 7^5 fois le reste précédent par 2^(31)-1. Les nombres « au hasard » recherchés sont ces restes divisés par le diviseur (voir, dans la littérature IREM/APMEP :

Bernard Parzysz : *Quelques questions à propos des tables et des générateurs aléatoires* , pp. 181-199

<u>Statistique au Lycée, Vol. 1 : Les outils de la statistique,</u>

Brochure APMEP n°167

Alain Ladureau : *Utiliser une calculatrice comme générateur de hasard pour résoudre des problèmes de mathématiques* , pp. 81-100

<u>Statistique au Lycée, Vol. 2 : Activités statistiques pour la classe</u>

Brochure APMEP n°167

<u>Solution</u>

1 - On peut répondre à cette question sans démonstration : M doit se trouver sur l'arc BA'C, extrémités non comprises. La démonstration peut faire l'objet d'un exercice annexe.

2 – Le professeur peut provoquer une discussion sur le thème : comment choisir un point au hasard sur un cercle ?

Les élèves se rendront peut-être compte que c'est difficile (impossible dans la pratique) : peut-on placer tous les points d'un cercle dans une urne et en choisir un au hasard ? Vaste problème !

Formellement, α est une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur l'intervalle [0,360[. On peut dire aux élèves, ce qui ne pose pas de problème, que α a autant de chance de tomber dans [0,120] que dans]120,240[ou dans [240,360[, parce que ce sont des intervalles de même longueur (peu importe qu'ils soient ouverts, fermés, ..., voir la question 2). Autrement dit, M a autant de chance de tomber sur l'arc AB, l'arc BC ou l'arc CA (privés ou non d'une ou deux extrémités). On en déduit naturellement que la probabilité pour que M tombe sur l'un de ces arcs est 1/3. Si on avait divisé [0,360[en 10 intervalles consécutifs de longueur 36, α aurait eu la probabilité 1/10 de tomber dans l'un quelconque d'entre eux. On fait appel à l'intuition conformément à l'esprit du programme concernant le Calcul des probabilités.

Les événements E et F sont identiques de probabilité p=1/3.

3 et suivantes – Il peut y avoir des difficultés de compréhension. Les difficultés liées à l'usage du tableur ont été aplanies en pré-insérant les formules à utiliser. On peut considérer comme désagréable d'utiliser de gros tableaux à 1500 lignes, parce qu'on ne peut pas les voir d'un seul coup d'œil. Mais en fait, on n'a pas le choix. Il faut au contraire expliquer aux élèves que les tableurs sont des outils très utiles puisqu'ils permettent de traiter simplement ces grands tableaux de nombres. 1500 tirages est en réalité insuffisant. Par exemple, nous avons obtenu 0,35 comme dernière fréquence calculée (au bout de 1500 choix au hasard de M) puis, en recommençant tous les calculs 4 fois, 0,29 0,32 0,35 et 0,33. Il y a donc des écarts importants. En fait, il faudrait réaliser l'expérience des dizaines de milliers de fois pour obtenir des résultats satisfaisants, car les convergences dans la loi des grands nombres sont lentes.

Vous pourrez retrouver les fréquences citées ci-dessus en recommençant les calculs en remplaçant la valeur initiale de A8 par la valeur obtenue en A1508, à recopier à la main ou par collage spécial : on recopie seulement la valeur. Cela revient à continuer le calcul de la suite récurrente initiale. On obtiendra alors le 0,29 et on pourra continuer. Cela rend l'activité beaucoup plus convaincante.

Le professeur verra s'il est utile de commenter les $ dans la formule saisie en D9. Quand on recommence les calculs, on demande aux élèves de reporter à la main en A8 le contenu de A1508. C'est le plus facile. On peut aussi faire un copier-coller en utilisant « Collage spécial » et en ne reportant que le nombre.