Marche aléatoire dans le plan
Simulation d'un jeu

TS

Fiche professeur

Auteurs : Jean-Marc Duquesnoy et Raymond Moché

But de l'activité : Simuler une marche aléatoire dans le plan, se référer à la loi des grands nombres, modifier un algorithme suivant les besoins.

Compétences engagées :
- ✓ Comprendre une situation
- ✓ Analyser la situation : identifer les données d'entrée, de sortie, le traitement
- ✓ Mise en place d'instructions conditionnelles
- ✓ Adapter un algorithme aux contraintes du langage de programmation

Pré-requis :
- ✓ Géométrie repérée de Seconde
- ✓ Loi des grands nombres
- ✓ Bonne connaissance de base du logiciel.

Matériels utilisés : : Salle informatique
Durée indicative : 2 séances d'une heure
Noms du logiciel utilisé : « scilab pour les lycées »
Documents utiles à télécharger et/ou à imprimer :
- ✓ Fiche Élève, fiche Professeur
- ✓ Fichiers scilab :
  Jeu.sce,
  nJeux.sce,
  Frequences.sce,
  NbQuestions.sce.

Commentaires :
L'activité proposée comprend 4 algorithmes qui sont construits sur le premier, qui est la simulation du jeu proprement dite. C'est une situation très riche et nullement triviale qui tourne autour de la loi des grands nombres. Nous avons choisi d'utiliser « scilab pour les lycées » que nous apprécions, mais on pourrait tout aussi bien utiliser « Xcas » ou tout autre logiciel de calcul numérique. Le niveau est soutenu. Le professeur pourra choisir de ne donner à ses élèves que les 6 premières questions et leur demander d'exécuter le fichier « NbQuestions.sce » afin qu'ils puissent y réfléchir.

Première partie

1 - Q est minimum quand une équipe gagne 6 fois de suite dès le début du jeu. La probabilité de l'événement $(Q = 6)$ est $4 \times \left(\frac{1}{4}\right)^6 = 0.0009765625$.

2 - On peut toujours imaginer une suite de tirages qui donne à Q une valeur plus grande qu'un entier donné. Il suffira par exemple de supposer que les équipes 1 et 2 gagnent alternativement un nombre de fois assez grand et qu'ensuite, l'équipe 1 gagne jusqu'à ce que le point N rencontre le pourtour du carré.

3 - La question est rédigée de manière à suggérer une boucle « tant que »(voir le fichier « Jeu.sce »). La partie principale de l'algorithme est

```
// Le point N est \'a l'origine
x=0;
y=0;
//on va compter le nombre Q de questions pos\' ees
Q=0; // initialisation de Q

while (x+6)*(x-6)*(y+6)*(y-6)<>0  // crit\'ere d'arr\^ et
  t=tirage_entier(1,1,4);
    if t==1 then
      x=x+1;
      y=y;
    elseif t==2 then
      x=x-1;
      y=y;
```

```
    elseif t==3 then
      x=x;
      y=y+1;
    elseif t==4 then
      x=x;
      y=y-1;
    end
Q=Q+1;
end
```

Il faudra peut-être aider les élèves à trouver un critère d'arrêt et leur rappeler la structure de l'instruction conditionnelle.

Deuxième partie

4 - Cet algorithme est facile à écrire (voir le fichier « nJeux.sce »). Il faudra sans doute rappeler aux élèves l'instruction« input ». On récupère l'algorithme précédent par un copier-coller et on le met dans une boucle « pour ». Pour compter les nombres de victoires de chaque équipe, on a utilisé des vecteurs V à 4 composantes, conformément à la nature de « scilab ».
On aurait pu faire une fonction « scilab » de l'algorithme « Jeu.sce » et appeler cette fonction quand on en a besoin. Le copier-coller nous a paru plus simple.

5 - À titre d'exemple, en simulant 1000 jeux, on a obtenu les fréquences suivantes :

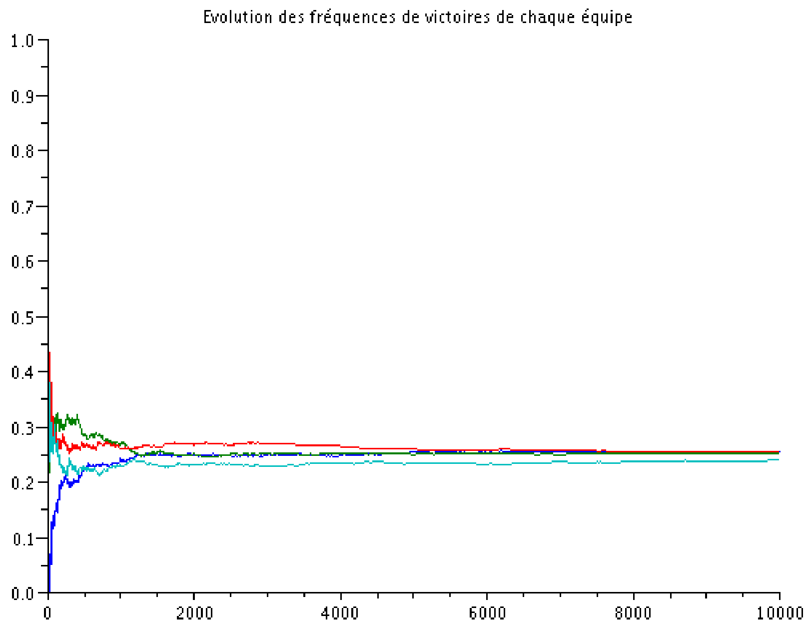
```
Fréquences des victoires:  0.25  0.21  0.27  0.27
```

Ce n'est pas fameux, mais suggère quand même que ces fréquences sont voisines de $\frac{1}{4}\cdot$ En simulant 10000 jeux (ce n'est pas très long), on a obtenu :

```
Fréquences des victoires:  0.2524  0.2495  0.2459  0.2522
```

6 - On a admis que les sommes des probabilités de victoire des 4 équipes est 1. Ces probabilités étant égales par raison de symétrie, chacune d'elles vaut donc $\frac{1}{4}\cdot$

7 - L'intérêt de cette question est surtout algorithmique. Elle peut être sautée sans inconvénient. Il faut modifier le fichier « nJeux.sce » précédent pour rassembler l'information nécessaire aux tracés et les exécuter. On peut voir ci-dessous des tracés après 10000 simulations. C'est un peu long. Il vaut mieux s'en tenir à 1000 comme c'est demandé.



8 - Il suffit de modifier un des fichiers précédents. À titre d'exemple, nous avons obtenu :

On constate que la valeur moyenne de Q semble se stabiliser autour d'une valeur un peu supérieure à 40. On a bien envie de dire que cette valeur est la valeur moyenne de Q. En fait, c'est exact mais bien au-delà des programmes de Calcul des Probabilités du lycée (on ne peut pas définir, en Terminale, la valeur moyenne d'une variable aléatoire qui peut prendre une infinité de valeurs). En effet, d'après la loi des grands nombres, valable dans ce cas, la valeur moyenne de Q obtenue expérimentalement comme ci-dessus au bout de n simulations du jeu tend vers l'espérance mathématique de Q quand n tend vers $+\infty$. On pourrait calculer cette espérance mathématique après avoir déterminé sa loi. Ce n'est pas simple. Mais la notion de valeur moyenne, elle, est connue des élèves. Nous trouvons que cette troisième partie est intéressante.