Algorithmique sans calculatrice : calcul de $\sqrt{2}$ par dichotomie

Seconde

Fiche professeur

Auteur : Raymond Moché

But de l'activité : Comprendre un algorithme simple en langage naturel. Cet algorithme comprend des entrées, une instruction de sortie et une boucle « pour »avec une instruction conditionnelle « si ... sinon ... », une sortie. Aucun logiciel de calcul n'est utilisé par les élèves.

Compétences engagées :

✓ Le calcul de $\sqrt{2}$ par dichotomie repose sur la croissance de la fonction carré, qui est redémontrée à la première question.

Pré-requis :

✓ Multiplication d'une inégalité par un nombre positif.

✓ Algorithme d'Euclide

Matériels utilisés :

✓ Une calculatrice, pour calculer la première puissance de 2 qui dépasse 10^9.

Durée indicative : 1 heure

Noms des logiciels utilisés par le professeur : « scilab » ou « Algobox » ou « Xcas ».

Documents utiles à télécharger :

✓ Fiche élève, fiche professeur.

✓ L'algorithme exécutable par le logiciel utilisé.

Déroulement de la séance :
Dans la salle de classe. Une heure devrait suffire d'autant plus que la première question peut être sautée si la croissance de la fonction carré dans $[0\,,\,+\infty[$ a déjà été démontrée. Cette activité n'est pas difficile si on la prend naturellement, sans formalisme. Pour que les élèves se concentrent sur le mécanisme de la dichotomie, on se limitera à l'algorithme sur papier. Voir ci-dessous : « Pour aller plus loin ». Le professeur aimera peut-être résumer le principe de la dichotomie. On peut dire par exemple : lorsque l'on sait que $\sqrt{2}$ appartient à un intervalle, on divise celui-ci en 2 par son milieu et on regarde si $\sqrt{2}$ se trouve dans la première moitié ou dans la seconde. La localisation de $\sqrt{2}$ est alors plus précise. Si l'on trouve que ce n'est pas assez, on recommence.

Solution :

1 - Comme $a \geq 0$, $a < b \Longrightarrow a^2 \leq ab$. De même, comme $b > 0$, $a < b \Longrightarrow ab < b^2$, donc

$$a < b \Longrightarrow a^2 < b^2 \tag{1}$$

Si $a = b$, évidemment $a^2 = b^2$. Enfin, en échangeant les rôles de a et b, si $b < a$, $b^2 < a^2$, d'après le début de la question. D'où l'équivalence

$$a < b \iff a^2 < b^2$$

valable dans l'intervalle $[0\,,\,+\infty[$.

2.a - $1 < \sqrt{2}$ parce que $1^2 < \sqrt{2}^2$ (1<2). De même pour $\sqrt{2} < 2$.

Convention Les élèves devront remarquer que le choix proposé pour r est celui qui donne la meilleure précision, quand on sait seulement que $1 < \sqrt{2} < 2$.

2.b - $r_1 = \dfrac{1+2}{2} = 1.5$; $e_1 = \dfrac{2-1}{2} = \dfrac{1}{2}$.

3.a - Il suffit de constater que $\sqrt{2}^2 < r_1^2$ (2<2.25).

3.b - $r_2 = \dfrac{1+r_1}{2} = \dfrac{1+1.5}{2} = 1.25$; $e_2 = \dfrac{r_1-1}{2} = \dfrac{1}{2^2}$.

4.a - Il suffit de démontrer que $r_2 < \sqrt{2}$, ce qui résulte de $r_2^2 = 1.25^2 = 1.5625 < 2 = \sqrt{2}^2$.

4.b - $r_3 = \dfrac{r_2+r_1}{2} = \dfrac{1.25+1.5}{2} = 1.375$ et $e_3 = \dfrac{r_1-r_2}{2} = \dfrac{1}{2^3}$.

5 - On cherche le plus petit entier $n > 0$ tel que $\dfrac{1}{2^n} \leq 10^{-9}$ ou $2^n \geq 10^9$. Cela peut se faire par tâtonnements. Comme

$$2^{10} = 1024, \quad 2^{30} = (2^{10})^3 = 1024^3 = 1073741824 > 10^9, \quad 2^{29} = 2^{30}/2 = 536870912 < 10^9$$

$n = 30$ est la plus petite valeur possible pour n.

6 - Remplacer ? par b.

Pour aller plus loin :

✓ Il est tentant de prolonger cette activité en exécutant l'algorithme sur le matériel (calculatrice ou ordinateur) ou le logiciel utilisé en classe. Cela pourra être présenté au vidéo-projecteur.C'est pourquoi nous mettons en ligne quelques fichiers de calcul. L'important, comme toujours, est d'écrire l'algorithme en langage naturel. L'écriture de l'algorithme exécutable est d'intérêt secondaire, même si elle peut faire perdre beaucoup de temps !

✓ **Fichier de calcul AlgoBox**

Valeur approchée de racine de 2 par dichotomie en partant de l'encadrement 1<racine de 2<2 :

```
VARIABLES
  a EST_DU_TYPE NOMBRE
  b EST_DU_TYPE NOMBRE
  valapp EST_DU_TYPE NOMBRE
  j EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  a PREND_LA_VALEUR 1
  b PREND_LA_VALEUR 2
  POUR j ALLANT_DE 1 A 30
    DEBUT_POUR
    valapp PREND_LA_VALEUR (a+b)/2
    SI (pow(valapp,2)<2) ALORS
      DEBUT_SI
      a PREND_LA_VALEUR valapp
      FIN_SI
      SINON
        DEBUT_SINON
        b PREND_LA_VALEUR valapp
        FIN_SINON
    FIN_POUR
  AFFICHER valapp
FIN_ALGORITHME
```

Le nombre de décimales affichées (et peut-être utilisées au cours des calculs ?) est insuffisant. Il vaut mieux demander une précision de un millionième.

✓ **Fichier de calcul Xcas**

Xcas donne la valeur approchée sous forme fractionnaire exacte, à savoir $\dfrac{1518500249}{1073741824}$, puis sous forme décimale à l'aide de « evalf ». Ce résultat est annoncé avec 16 décimales, mais seules les 9 premières sont certainement exactes.

$\boxed{1}$

```
dic(a,b):={
local f,j;
for (j:=1;j<=30;j++)
{f:=(a+b)/2
  if (f*f<2)
   {a:=f}
  else
   {b:=f}
```

```
}
return f
}
:;
```
// Parsing dic
// Success compiling dic

$$\text{Done} \tag{2}$$

$\boxed{2}$ `res :=dic(1,2);`

$$\frac{1518500249}{1073741824} \tag{3}$$

$\boxed{3}$ `evalf(res);`

$$1.4142135614529252 \tag{4}$$

$\boxed{4}$

✓ Fichier de calcul scilab

```
//Calcul de racine de 2 par dichotomie a partir de l'encadrement 1<racine de 2<2
// au milliardieme
n=30;
a=1;
b=2;
  for i=1:30;
    valapp =(a+b)/2;
      if valapp^2 < 2 then
        a = valapp;
      else
        b = valapp;
    end
end
format('v',12);
disp(valapp)
```

Il donne directement le résultat avec 9 décimales exactes : 1.414213561.