Algorithmique sans machine : calcul de $\sqrt{2}$ par dichotomie

Seconde

Fiche élève

Auteur : R M

Le but de cette activité est de calculer $\sqrt{2}$ avec une précision de un milliardième.

I - Préliminaires

1 - Démontrer que si a et b désignent deux réels $\geqslant 0$,

$$a < b \quad \Longleftrightarrow \quad a^2 < b^2$$

Cette implication montre que la fonction carré $x \mapsto x^2$ est strictement croissante sur l'intervalle $[0\,,\,+\infty[$.

2 - On note $\sqrt{2}$ le nombre > 0 dont le carré est égal à 2.

2.a - Déduire de la question précédente que

$$1 < \sqrt{2} < 2 \tag{1}$$

> **Convention** Si on sait que $\sqrt{2}$ appartient à un intervalle $]a\,,b[$, en l'absence de tout autre renseignement, on proposera comme valeur approchée de $\sqrt{2}$ le nombre r (abscisse du milieu de l'intervalle $]a\,,b[$) défini par
>
> $$r = \frac{a+b}{2}$$
>
> On est alors sûr que l'erreur d'approximation ou précision, à savoir $e = |\sqrt{2} - r|$ est majorée par $\dfrac{b-a}{2}$, autrement dit
>
> $$e < \frac{b-a}{2}.$$

2.b - Déduire des inégalités (1) une première approximation, notée r_1, de $\sqrt{2}$ et indiquer la précision e_1 de cette approximation.

3.a - Démontrer que

$$\sqrt{2} < r_1$$

3.b - $\sqrt{2}$ appartenant à l'intervalle $]1\,,r_1[$, quelle nouvelle approximation r_2 de $\sqrt{2}$ nous donne une deuxième application de la convention ? Quelle est la précision e_2 de cette approximation, exprimée comme une puissance de $\dfrac{1}{2}$?

4.a - Démontrer que

$$r_2 < \sqrt{2} < r_1$$

4.b - En déduire une troisième approximation r_3 de $\sqrt{2}$ et préciser sa précision e_3.

> *Commentaire : r_1, r_2 et r_3 sont des approximations de $\sqrt{2}$ dont la précision est chaque fois divisée par 2 ($e_2 = e_1/2$; $e_3 = e_2/2$). Néanmoins, $e_3 = \dfrac{1}{2^3} = 0{,}125$ est encore très loin de un milliardième. Il faudra donc répéter ce calcul, peut-être un grand nombre de fois. Aussi est-il nécessaire de l'automatiser à l'aide d'un algorithme.*

II - Automatisation du calcul, algorithmique

5 - Ci-dessus, nous avons appliqué 3 fois la convention. Combien de fois au moins faudra-t-il l'appliquer pour obtenir une approximation de $\sqrt{2}$ avec une précision de 10^{-9} ?

6 - Vérifier et compléter l'algorithme suivant :

Algorithme 1 : Calcul de $\sqrt{2}$ par dichotomie à un milliardième près, en partant de $1 < \sqrt{2} < 2$

Entrées :
$a = 1$
$b = 2$
Sorties :
une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à un milliardième près
début
    pour j variant de 1 à 30 **faire**
        $r \leftarrow \frac{a+b}{2}$;
        si $r^2 < 2$ **alors**
        $a \leftarrow r$;
        sinon
        $? \leftarrow r$;
    fin
    Imprimer r ;
fin